8

Cuerpos geométricos

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Distinguir las clases de cuerpos geométricos.
- Construirlos a partir de su desarrollo plano.
- Calcular sus áreas y volúmenes.
- Localizar un punto sobre la Tierra.
- Calcular la hora en cada país.
- Cómo se hacen los distintos tipos de mapas y las ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos.

Antes de empezar

Recuerda

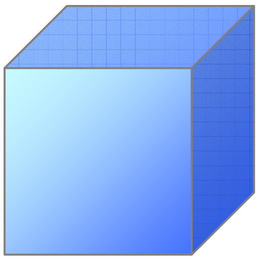
Un **poliedro** es un cuerpo cerrado limitado por polígonos.

Cada uno de ellos recibe el nombre de **cara.** Los lados de las caras son las **aristas** del poliedro y los extremos de las aristas son los **vértices** del poliedro.

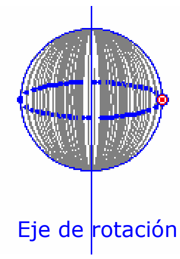
En todo poliedro simple (sin huecos) se cumple **la relación de** Euler:

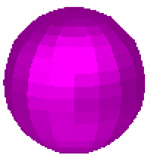
El número de caras de un poliedro (C) es igual al número de aristas (A) menos el de vértices (V) más 2.

$$C = A - V + 2$$



C=6 V=8 A=12
A-V+2=12−8+2=6=C





Un **cuerpo de revolución** es cualquier figura geométrica construida al hacer girar una figura plana alrededor de un eje contenido en el mismo plano.

1. Poliedros regulares

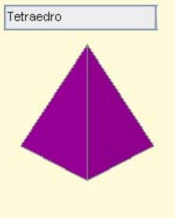
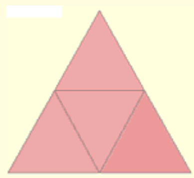
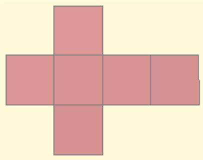
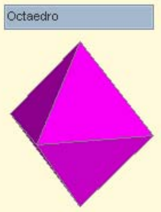
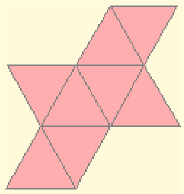
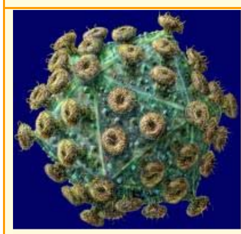
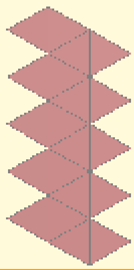
Definiciones

Diremos que un **poliedro** es **regular** cuando se cumplen las siguientes condiciones:

- Sus caras son polígonos regulares iguales.
- En cada vértice concurren el mismo número de caras.

Sólo hay cinco poliedros regulares (llamados también **Sólidos Platónicos**):

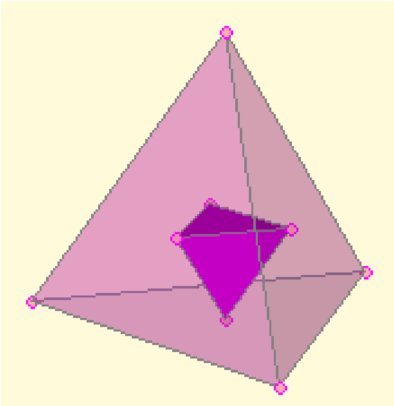
- **Tetraedro**: 4 caras (triángulos equiláteros)
- **Hexaedro o cubo**: 6 caras (cuadrados)
- **Octaedro**: 8 caras (triángulos equiláteros)
- **Dodecaedro**: 12 caras (pentágonos regulares)
- **Icosaedro**: 20 caras (triángulos equiláteros)

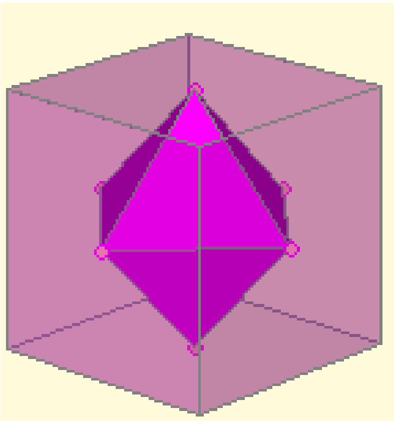
Característica...s		Desarrollo
 Empaquetamiento de bolas en forma de tetraedro.	 Caras: 4 triángulos equiláteros Aristas: 6 Vértices: 4	
 Cristales cúbicos de pirita (Sulfuro de hierro FeS2)	 Caras: 6 cuadrados Aristas: 12 Vértices: 8	
 Cristales octaédricos de fluorita (Fluoruro de Calcio CaF2)	 Caras: 8 triángulos equiláteros Aristas: 12 Vértices: 6	
 Instituto de la Construcción Eduardo Torroja (Madrid)	 Caras: 12 pentágonos regulares Aristas: 30 Vértices: 20	
 Estructura icosaédrica de un virus	 Caras: 20 triángulos equiláteros Aristas: 30 Vértices: 12	

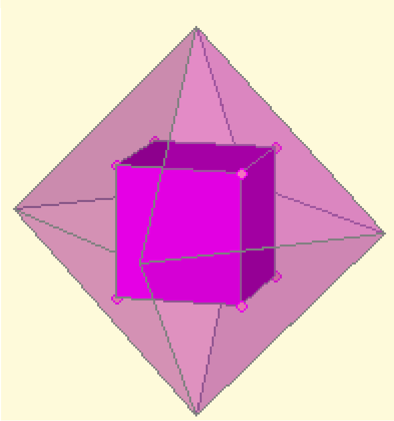
Desarrollos

Se dice que un cuerpo geométrico es **desarrollable** cuando puede ser construido a partir de una figura plana formada por todas las caras del cuerpo.

Todos los poliedros regulares son desarrollables y en este apartado te mostramos las figuras que permiten su construcción.







Poliedros duales

Se dice que dos poliedros son **duales** si el número de vértices del primero coincide con el número de caras del segundo y viceversa. Además ambos deben tener el mismo número de aristas.

Si dos poliedros son duales puede construirse uno a partir del otro uniendo con segmentos los centros de cada dos caras contiguas del primero.

En las imágenes se muestra que el cubo y el octaedro son duales, el dodecaedro y el icosaedro también y que el tetraedro es dual consigo mismo.

Tetraedro: nº de vértices = 4 = nº de caras.

Nº de caras del cubo = 6 = nº de vértices del octaedro

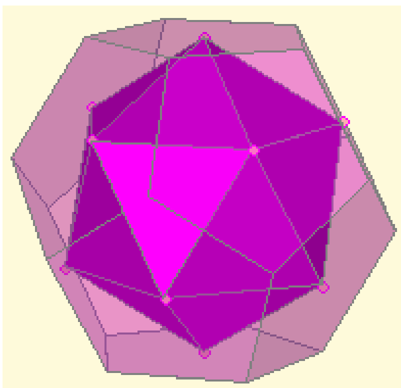
Nº de caras del octaedro = 8 = nº de vértices del cubo

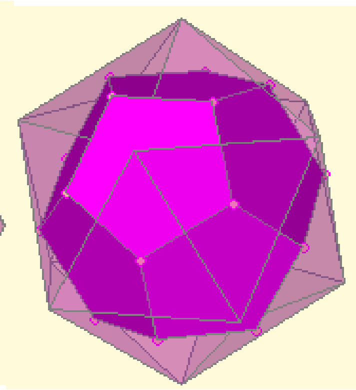
Nº de aristas del cubo = 12 = nº de aristas del octaedro.

Nº de caras del dodecaedro = 12 = nº de vértices del icosaedro

Nº de caras del icosaedro = 20 = nº de vértices del dodecaedro

Nº de aristas del dodecaedro = 30 = nº de aristas del icosaedro.



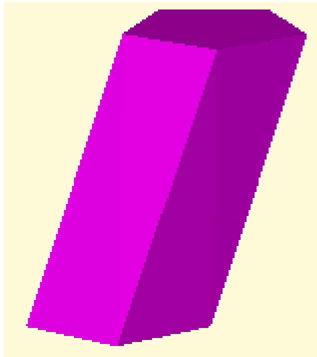


2. Otros poliedros

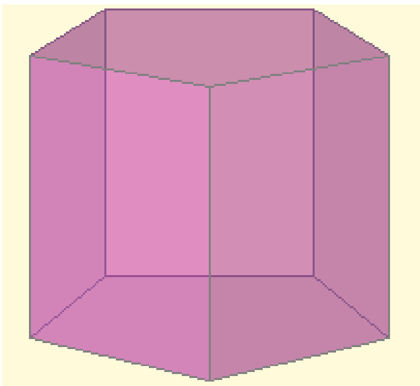
Prismas

Un **prisma** es un poliedro con dos caras paralelas formadas por polígonos iguales cuyos lados se unen mediante paralelogramos. Las caras paralelas son las ***bases*** y los paralelogramos son los ***lados***.

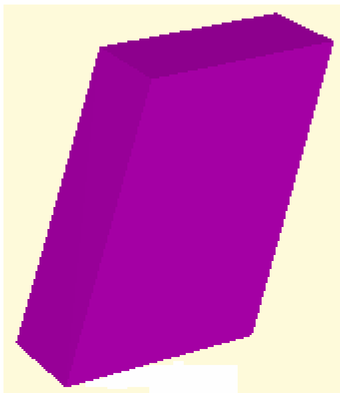
- Si los lados son rectángulos es un **prisma recto**, en caso contrario es un **prisma oblicuo**.
- Si las bases son paralelogramos es un **paralelepípedo** y si las bases y los lados son rectángulos es un **ortoedro**.
- Si las bases de un prisma recto son polígonos regulares decimos que es un **prisma regular**.



Prisma oblicuo

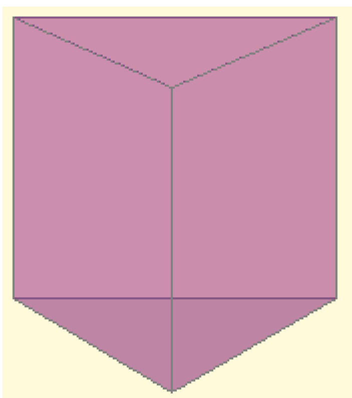


Prisma regular pentagonal

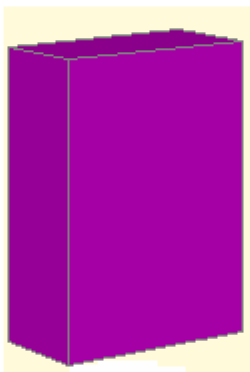


Prisma oblicuo

Paralelepípedo



Prisma regular triangular



Prisma recto

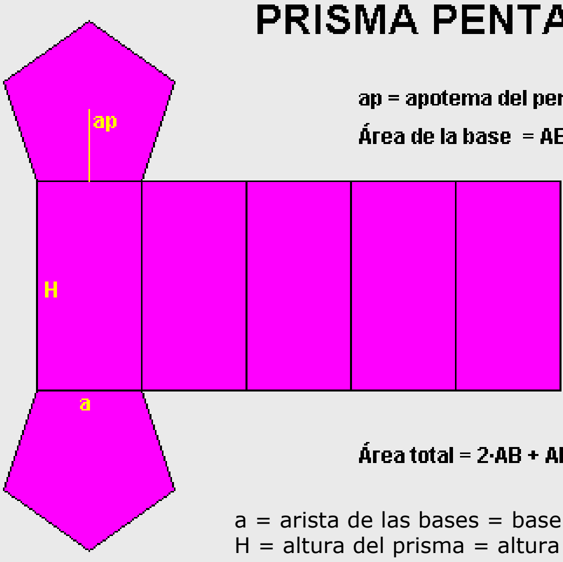
Ortoedro

Desarrollos, áreas y volúmenes de prismas regulares

Los prismas son cuerpos desarrollables. En particular, los prismas regulares tienen un desarrollo muy sencillo, formado por tantos rectángulos iguales como lados tenga y dos polígonos regulares que forman las bases. Esto facilita el cálculo de sus áreas y volúmenes.

1. Desarrollo y área de un prisma regular pentagonal:

PRISMA PENTAGONAL



ap = apotema del pentágono p = perímetro = $5 \cdot a$

Área de la base $= AB = \dfrac{p \cdot ap}{2} = \dfrac{5 \cdot a \cdot ap}{2}$

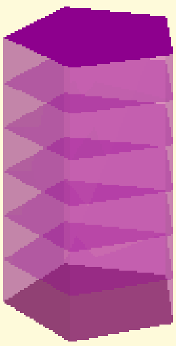
Área de un lado = $a \cdot H$

Área lateral = $AL = 5 \cdot a \cdot H$

Área total = $2 \cdot AB + AL = 5 \cdot a \cdot ap + 5 \cdot a \cdot H = 5 \cdot a \cdot (ap + H)$

a = arista de las bases = base de los rectángulos laterales
H = altura del prisma = altura de los rectángulos laterales

2. Volumen de un prisma pentagonal regular:



Observa el prisma de la izquierda.

Podemos considerar que está formado por una serie apilada de prismas del mismo tipo cuya altura es la unidad.

El volumen de cada uno de estos pequeños prismas es igual al área de la base, A, luego el volumen del prisma grande será:

$$V = A \cdot H$$

siendo H la altura del prisma.

PRISMA PENTAGONAL

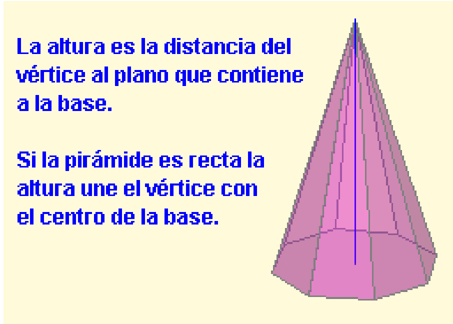
$$V = \frac{p \cdot ap}{2} \cdot H = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2} \cdot H$$

Pirámides

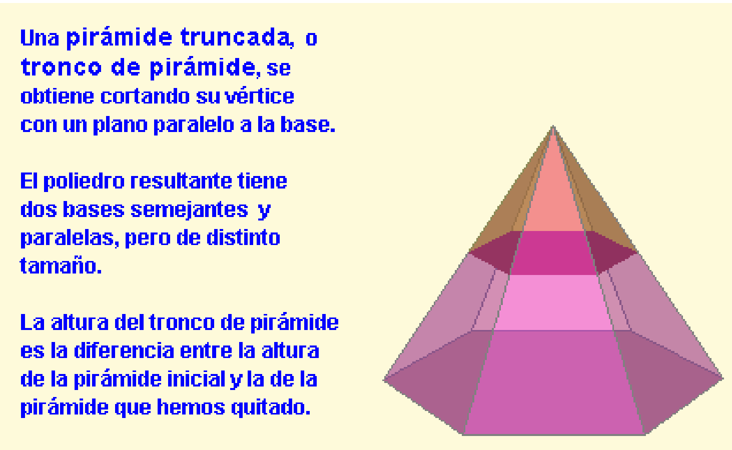
Una **pirámide** es un poliedro con una cara formada por un polígono cualquiera sobre cuyos lados se levantan triángulos que se unen en un punto común. El polígono es la ***base*** de la pirámide, los triángulos son los ***lados*** y el punto común es el ***vértice***.

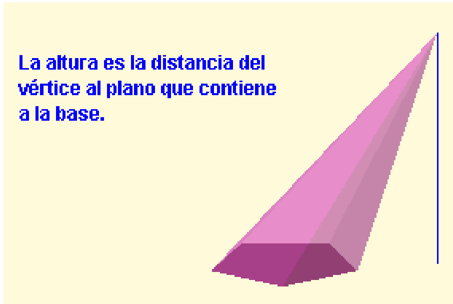
Si el vértice se proyecta verticalmente sobre el centro de la base es una **pirámide recta**, en caso contrario es una **pirámide oblicua**.

Si la base de una pirámide recta es un polígono regular decimos que es una **pirámide regular**. En ese caso los lados son triángulos isósceles y todos iguales. *El tetraedro es un caso particular de pirámide*.



Pirámide octogonal recta



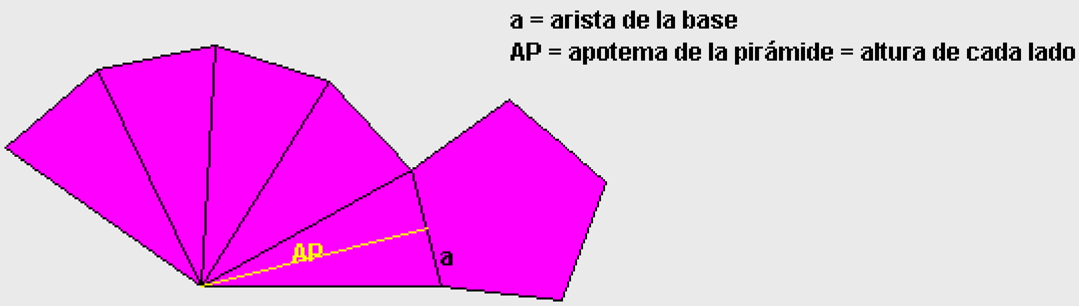


Pirámide pentagonal oblicua

Desarrollos, áreas y volúmenes de pirámides regulares

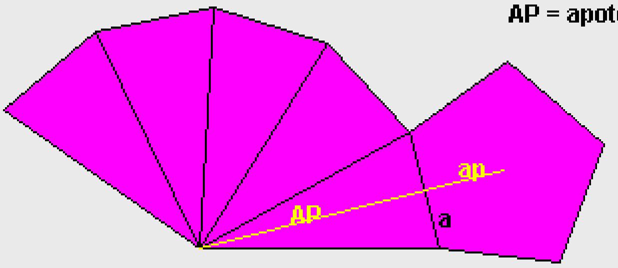
Las pirámides son cuerpos desarrollables. En particular, las pirámides regulares tienen un desarrollo muy sencillo, formado por tantos triángulos isósceles iguales como lados tenga y un polígonos regular que forma la base. Al igual que en los prismas esto facilita el cálculo de sus áreas y volúmenes.

3. Desarrollo de una pirámide regular pentagonal:



4. Área de una pirámide regular pentagonal:

a = arista de la base
AP = apotema de la pirámide = altura de cada lado



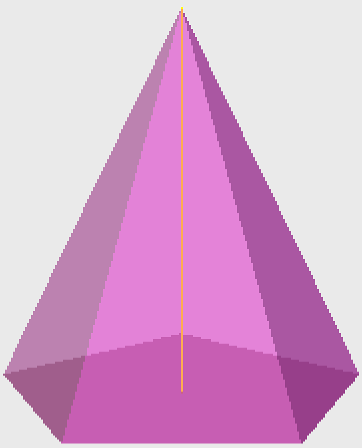
Área de la base = AB = $\frac{p \cdot ap}{2} = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2}$

Área de un lado = $\frac{a \cdot AP}{2}$

ÁREA TOTAL = AB+AL = $\frac{5 \cdot a \cdot ap}{2} + 5 \cdot \frac{a \cdot AP}{2} = \frac{5 \cdot a}{2} \cdot (ap + AP)$

Área lateral = AL = $5 \cdot \frac{a \cdot AP}{2}$

5. Volumen de una pirámide regular pentagonal:



El volumen de cualquier pirámide es siempre igual a la tercera parte del volumen de un prisma que tenga la misma base y la misma altura, es decir,

$$V = \frac{1}{3} AB \cdot H$$

siendo, AB el área de la base y H la altura de la pirámide

PIRÁMIDE PENTAGONAL

Área de la base = $\frac{p \cdot ap}{2} = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2}$

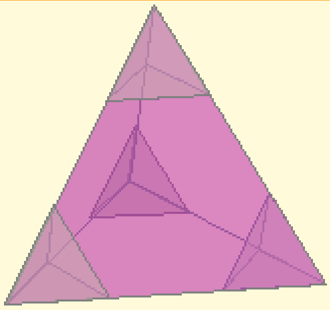
Volumen = $\frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2} \cdot H = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{6} \cdot H$

Poliedros semirregulares

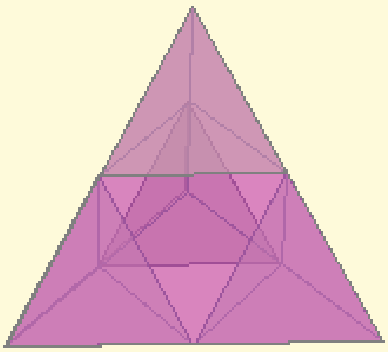
Un **poliedro semirregular** es un poliedro cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos, de forma que en cada vértice concurren los mismos polígonos (en número y en tipo).

Se pueden obtener con cierta facilidad poliedros semirregulares a partir de los poliedros regulares mediante la técnica del truncamiento.

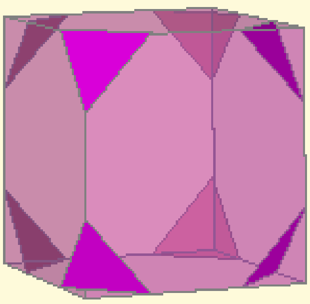
Truncar un poliedro consiste en suprimir uno de sus vértices mediante la aplicación de un corte plano.



Tetraedro truncado
Poliedro semirregular con 4 hexágonos regulares y 4 triángulos equiláteros. En cada vértice confluyen 2 hexágonos y 1 triángulo.



Tetraedro truncado
Octaedro regular.



Cubo truncado
Poliedro semirregular con 8 triángulos equiláteros y 6 octógonos regulares. En cada vértice confluyen 2 octógonos y 1 triángulo.

Cubo truncado
Cuboctaedro. Formado por 6 cuadrados y 8 triángulos equiláteros. En cada vértice confluyen 2 cuadrados y 2 triángulos.

Octaedro truncado
Poliedro semirregular con 8 hexágonos regulares y 6 cuadrados. En cada vértice confluyen 2 hexágonos y 1 cuadrado.

Octaedro truncado
Cuboctaedro. Formado por 6 cuadrados y 8 triángulos equiláteros. En cada vértice confluyen 2 cuadrados y 2 triángulos.

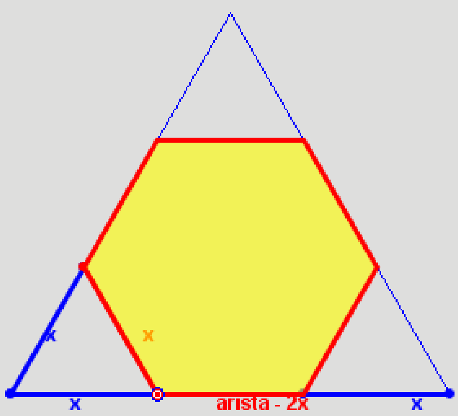
Dodecaedro truncado
Poliedro semirregular con 12 decágonos regulares y 20 triángulos equiláteros. En cada vértice confluyen 2 decágonos y 1 triángulo.

Dodecaedro truncado
Poliedro semirregular con 12 pentágonos y 20 triángulos equiláteros. En cada vértice confluyen 2 pentágonos y 2 triángulos.

Icosaedro truncado
Poliedro semirregular con 12 pentágonos regulares y 20 hexágonos regulares. En cada vértice confluyen 2 hexágonos y 1 pentágono.

EJERCICIOS resueltos

6. Determinar la longitud de la arista de un tetraedro, de un octaedro o de un icosaedro que hay que truncar a partir de un vértice para obtener un poliedro semirregular.



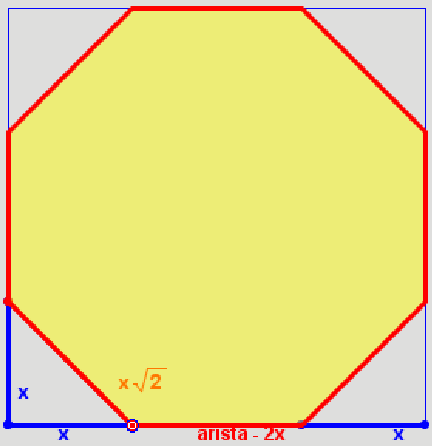
El triángulo adjunto representa una cara de un tetraedro, octaedro o icosaedro regular.
Moviendo el punto rojo se simula el truncamiento de los vértices.

La figura resultante es un hexágono, que debe ser regular para que el poliedro que buscamos sea semirregular.

Esto se consigue cuando
$x = \text{arista} - 2x$
o sea, cuando
$\text{arista} = 3x$

Luego el corte debe producirse a una distancia del vértice de un tercio del total de la arista.

7. Determinar la longitud de la arista de un cubo que hay que truncar a partir de un vértice para obtener un poliedro semirregular.



El cuadrado adjunto representa una cara de un cubo.
Moviendo el punto rojo se simula el truncamiento de los vértices.

Al truncar observamos que la figura resultante es un octógono, que debe ser regular para que el poliedro que buscamos sea semirregular.

Esto se consigue cuando

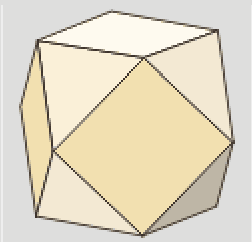
$x\sqrt{2} = \text{arista} - 2x$

o sea, cuando

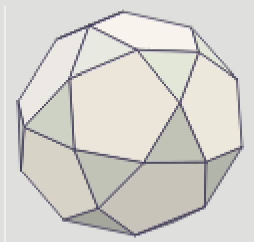
$x = \dfrac{\text{arista}}{2+\sqrt{2}}$

8. Analiza la dualidad de poliedros regulares cuando se truncan por la mitad de la arista.

El cubo y el octaedro son duales.
En ambos casos se obtiene un
CUBOCTAEDRO



El dodecaedro y el icosaedro son duales.
En ambos casos se obtiene un
ICOSIDODECAEDRO

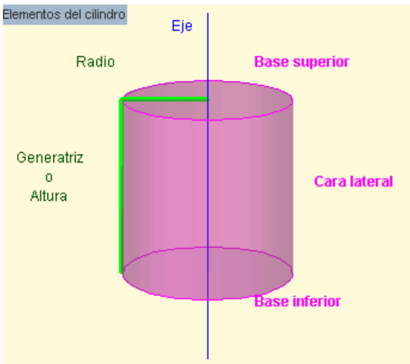


3. Cuerpos de revolución

Cilindros

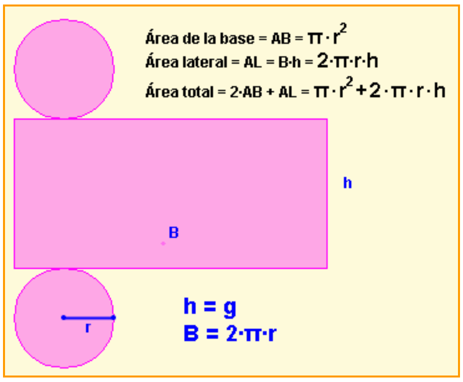
Un **cilindro** es un cuerpo generado por un segmento (***generatriz***) al girar alrededor de una recta paralela al mismo (***eje***). El cilindro es un cuerpo desarrollable.

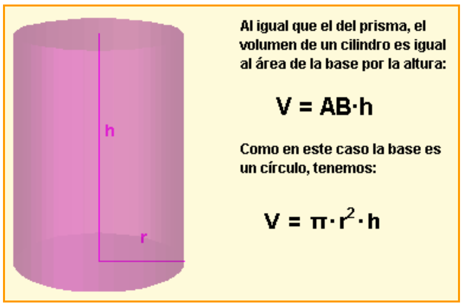
Un cilindro tiene 3 caras: dos de ellas son círculos paralelos e iguales (***bases***) y la otra es una cara curva (***cara lateral***) que desarrollada se transforma en un rectángulo.



El ***radio*** del cilindro es el radio de cualquiera de sus bases y la ***altura*** del cilindro es la longitud de la generatriz.

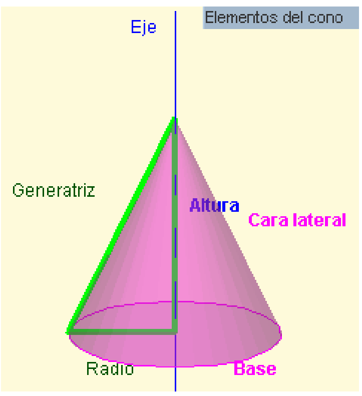
La cara lateral desarrollada es un rectángulo cuya base es la longitud de la circunferencia que rodea la base y cuya altura es la generatriz.





Conos

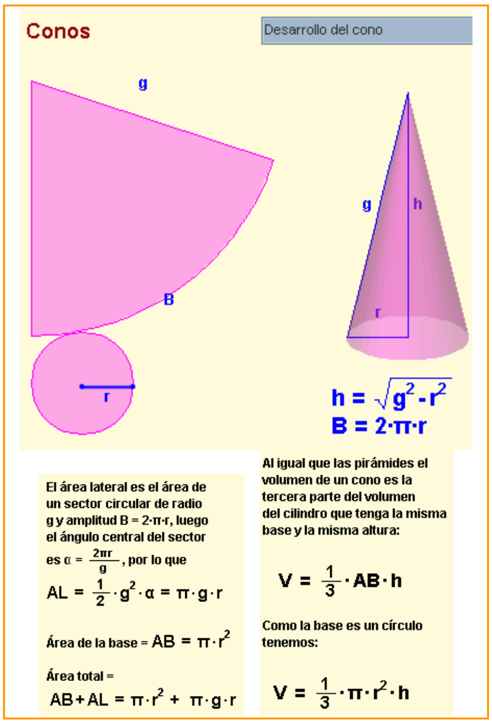
Un **cono** es un cuerpo generado por un segmento (***generatriz***) al girar alrededor de una recta sobre la que se apoya uno de sus extremos (***eje***). El cono es un cuerpo desarrollable.

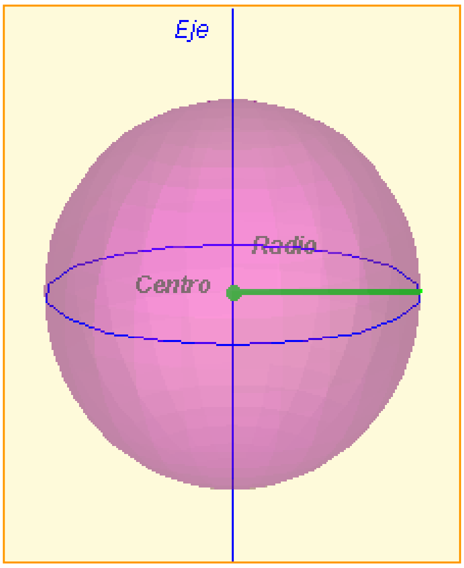


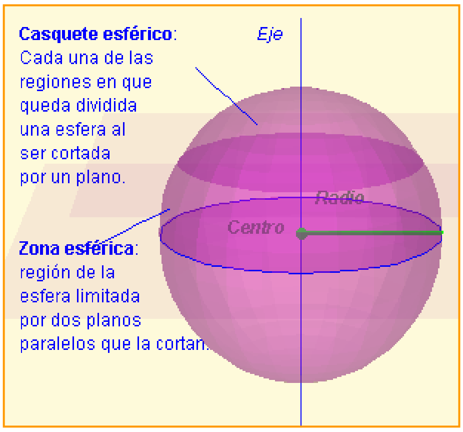
Un cono tiene 2 caras: un círculo (***base***) y una cara curva (***cara lateral***) que desarrollada se transforma en un sector circular.

El punto de apoyo de la generatriz sobre el eje es el ***vértice*** del cono. El ***radio*** del cono es el radio de su base y la ***altura*** del cono es la distancia del vértice al centro de la base.

La cara lateral desarrollada es un sector circular cuyo radio es la generatriz y cuya amplitud es la longitud de la circunferencia de la base.







Esferas

Una **esfera** es un cuerpo generado por un círculo al girar alrededor de cualquiera de sus diámetros.

El ***radio*** de una esfera es el mismo que el radio del círculo que la engendra y coincide con la distancia del centro de la esfera a cualquiera de los puntos de su superficie. Esta propiedad caracteriza a la esfera: *la esfera es el conjunto de puntos del espacio que equidistan de un punto fijo, llamado centro*.

Las esferas no son desarrollables. Por ese motivo la elaboración de mapas es un problema importante. Analizaremos este problema con más detalle en el último capítulo.

- **Área de la esfera**

El área de una esfera de radio r es igual al área lateral del cilindro que la circunscribe.

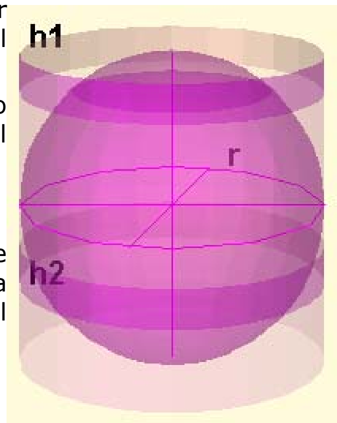
Como el radio de ese cilindro también es r y su altura 2r, el área de la esfera es:

$$\mathbf{A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 2r = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

Además el área de un casquete esférico o de una zona esférica también es igual al área lateral del cilindro que la contiene.

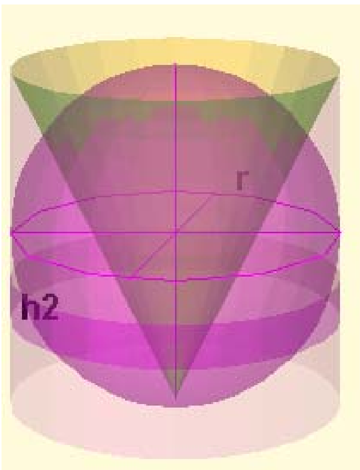
Área del casquete=$2 \cdot \pi \cdot r \cdot h1$

Área de la zona=$2 \cdot \pi \cdot r \cdot h2$



- **Volumen de la esfera**

$$\mathbf{V_E = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$$



El volumen del cilindro circunscrito es:

$$\mathbf{V_{CI} = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2 \cdot \pi \cdot r^3}$$

Por tanto el volumen de la esfera equivale a los dos tercios del volumen del cilindro circunscrito.

Como el volumen de un cono del mismo radio y altura es la tercera parte del volumen del cilindro:

$$\mathbf{V_E + V_{CO} = V_{CI}}$$

La misma relación vale para el volumen de una zona esférica:

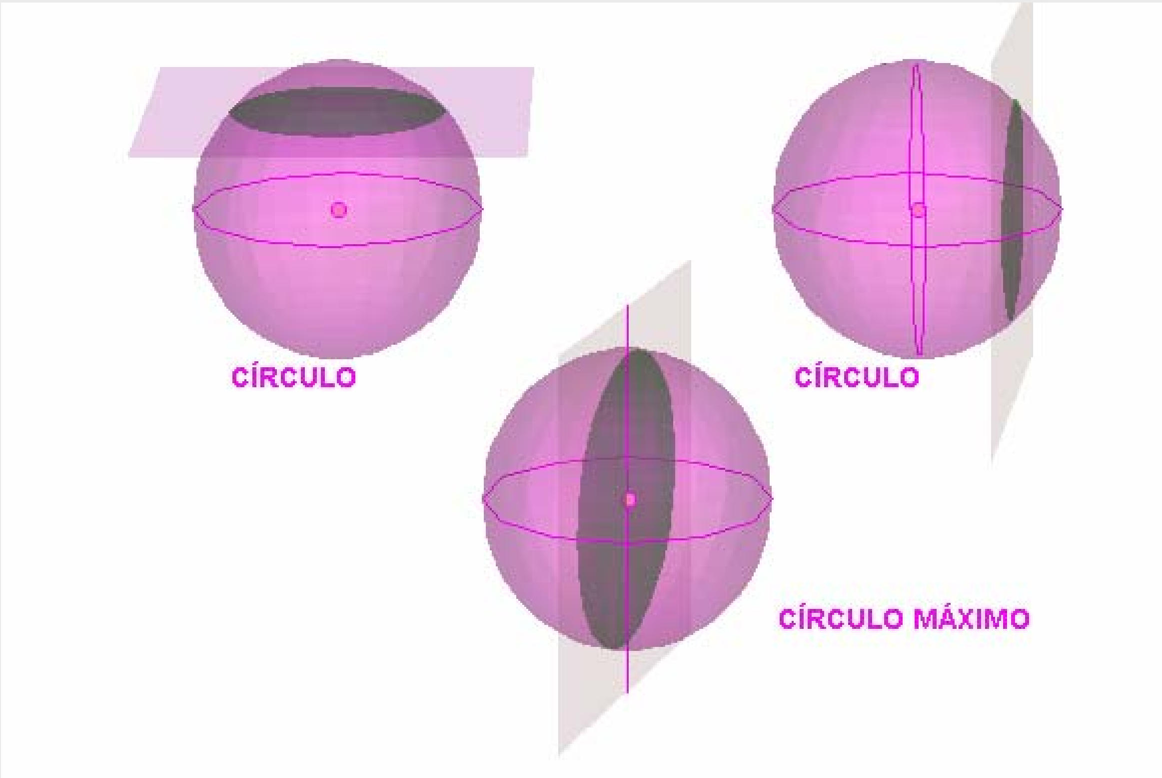
El volumen de una zona esférica es igual al volumen del cilindro que la rodea menos el volumen del tronco de cono que queda en su interior.

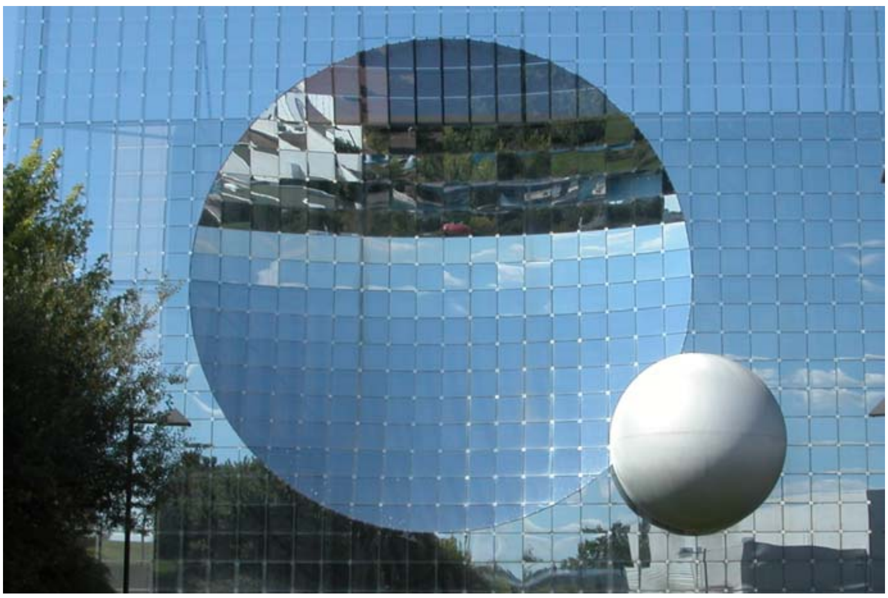
$$V_{ZE} = \pi \cdot r^2 \cdot h2 - V_{TCO}$$

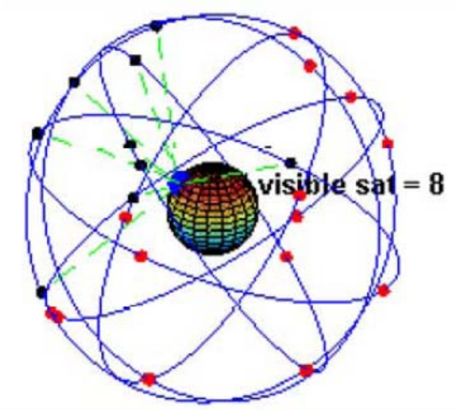
Círculos en la esfera

Cuando un plano corta a una esfera la intersección de ambas figuras produce siempre un círculo. Si ese círculo contiene al centro de la esfera se dice que es un CÍRCULO MÁXIMO.

Las circunferencias que limitan a los círculos máximos tienen la propiedad de que son caminos más cortos entre dos puntos cualesquiera de la superficie de la esfera.



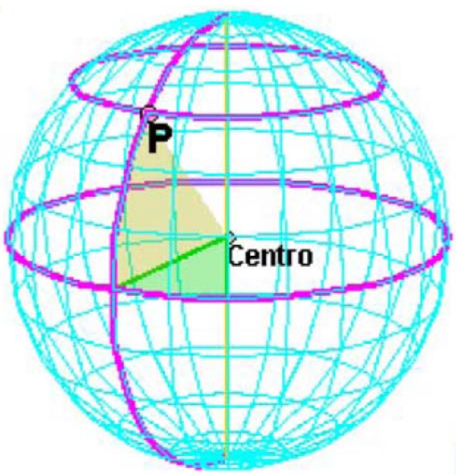




En la imagen puedes ver una reperesentación del conjunto de satélites que utiliza el Sistema de Posicionamiento Global (GPS) para localizar con precisión personas, objetos vehículos.

La pareja de números (longitud, latitud) forman lo que se llama coordenadas geográficas de un lugar.
Estas coordenadas determinan de forma precisa la posición sobre la Tierra de un población, un barco, un avión, un coche e incluso un teléfono móvil.

Polo norte



Polo sur

LONGITUD: **30° O**
LATITUD: **45° N**

4. La esfera terrestre

Coordenadas geográficas

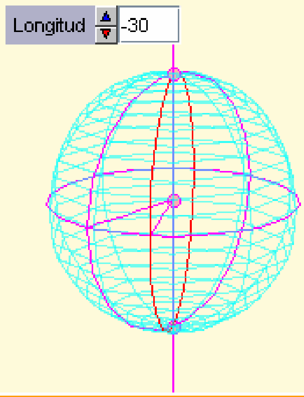
La Tierra tiene una forma casi esférica. Gira sobre una línea llamada **eje**. Los puntos en los que el eje corta a la superficie de la Tierra son los **polos geográficos**.

Los planos que contienen al eje cortan a la Tierra en círculos máximos cuyos bordes son circunferencias llamadas **meridianos**.

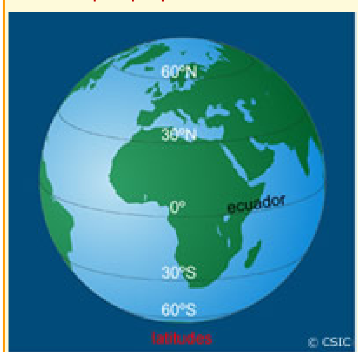
El plano perpendicular al eje que pasa por el centro de la Tierra la corta en un círculo máximo cuyo borde es el **Ecuador**. Los planos paralelos al plano del Ecuador cortan a la Tierra en círculos que ya no son máximos. Sus bordes son los **paralelos**.

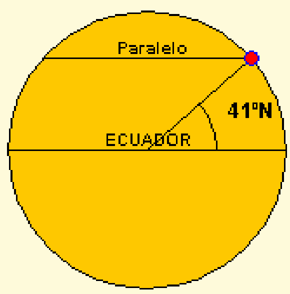
- **Longitud y latitud**

Por cada punto de la Tierra pasa un meridiano y sólo uno. Su distancia angular con respecto a un meridiano de referencia (Meridiano 0 o de Greenwich) se denomina **longitud**. Viene medida en grados y hay que indicar si es Este (°E) u Oeste (°O). La longitud varía entre 0° y 180°. Como ejemplo, Valladolid tiene una longitud de 5°O.



Por cada punto de la Tierra pasa un paralelo y sólo uno. Su distancia angular con respecto al Ecuador se denomina **latitud**. Viene medida en grados y hay que indicar si es Norte o Sur.
La latitud mínima se alcanza en cualquier punto del Ecuador y es de 0°.
La latitud máxima se alcanza en los polos 90°N y 90°S.
Como ejemplo, Valladolid tiene una latitud de 41°N.





EJERCICIOS resueltos

9. Aunque ahora se usa una definición más precisa, el metro es, aproximadamente, la *diezmillonésima parte del cuadrante de un meridiano cualquiera*. Esto significa que todos los círculos máximos sobre la Tierra miden, aproximadamente, 40.000.000 de metros (en particular, todos los meridianos y el Ecuador). A partir de este dato calcula la longitud del radio de la Tierra, su superficie y su volumen.

SOLUCIÓN:

40.000.000 m = 40.000 km. Como la longitud de una circunferencia es $2\pi r$, tenemos que

$$r = \frac{40000}{2\pi} \approx 6366 \text{ km}$$

El área de su superficie (usando la fórmula del área de una esfera) es:

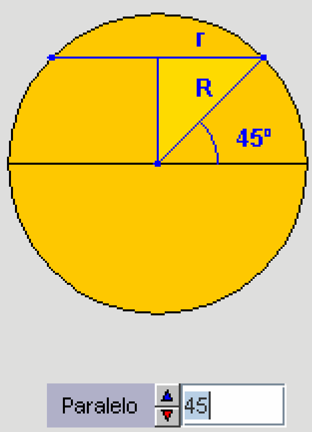
$$A = 4\cdot\pi\cdot r^2 = 4\cdot 3{,}14\cdot 6366^2 \approx 509.000.000 \text{ km}^2$$

Y su volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 6366^3}{3} \approx 1{,}08\cdot 10^{12} \text{ km}^3 \approx \text{un billón de km}^3$$

10. Salvo el Ecuador, los paralelos no son círculos máximos y calcular su longitud requiere el uso de unas herramientas que no verás hasta el curso que viene. Sin embargo, en algunos casos concretos y con ayuda de nuestro viejo amigo, el Teorema de Pitágoras, podemos hacerlo. Calcula la longitud del paralelo de 45ºN.

SOLUCIÓN: R = radio de la Tierra = 6366 km



La horizontal superior representa el diámetro del paralelo 45ºN

El complementario de 45º es 45º, luego el triángulo rectángulo de la figura tiene los dos catetos iguales y uno de ellos es el radio del paralelo 45º:

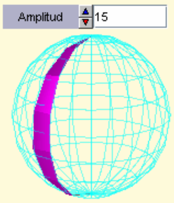
$$r^2 + r^2 = R^2, \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{6366}{\sqrt{2}} \approx 4501 \text{ km}$$

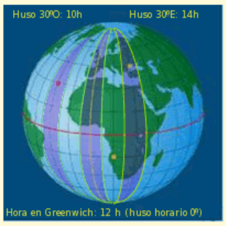
La longitud del paralelo 45º es pues:

$$\text{long} = 2\cdot\pi\cdot r = 2\cdot 3{,}14\cdot 4501 \approx 28281 \text{ km}$$

Husos horarios

Un huso esférico es la región de la superficie de la esfera limitada por dos círculos máximos.
En el caso de la Tierra llamamos HUSO HORARIO a un huso esférico limitado por dos meridianos.





Un **día** es el tiempo que tarda la Tierra en girar sobre sí misma. Así, en cualquier punto es ***mediodía*** cuando el Sol pasa por el meridiano del lugar. Esto hace que incluso localidades cercanas tengan horas distintas.

Para evitar este problema se ha dividido la Tierra en 24 zonas que tienen la misma hora. Esas zonas se establecen así: Centrado en el meridiano 0º se forma un ***huso esférico*** de 15º (360º:24h=15º). En todos los puntos de este huso será mediodía cuando el Sol pase por el meridiano 0º. A partir de él con giros de 15º se forman los otros 23 **husos horarios**. El Sol tarda una hora en cruzar cada huso.

EJERCICIOS resueltos

11. Tenemos una esfera de 9 cm de radio. Calcula la superficie de un huso esférico sobre esa esfera de 59º de amplitud.

SOLUCIÓN:

La superficie de la esfera es $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 9^2 = 1017{,}87\ cm^2$

La superficie de un huso esférico de 1º de amplitud es $\frac{A}{360}$

Por tanto, la superficie de nuestro huso es de $\frac{A}{360} \cdot 59 = 166{,}81\ cm^2$

12. La ciudad A tiene una longitud de 123ºO y la ciudad B de 23ºE. Calcula la hora que es en la ciudad B cuando en la ciudad A son las 10 horas.

SOLUCIÓN:

Dividimos las longitudes por la amplitud de un huso horario (15º). Si el resto es menor de 7º 30' el cociente es la diferencia de husos horarios de cada ciudad con el meridiano 0º. Si el resto es mayor entonces hay que sumar una unidad al cociente:

$123^\circ = 15^\circ \cdot 8 + 3^\circ$ luego la ciudad A está 8 husos horarios al Oeste del merid. de Greenwich.

$23^\circ = 15^\circ \cdot 1 + 8^\circ$ luego la ciudad B está 2 husos horarios al Este del merid. de Greenwich.

Por tanto, la diferencia horaria entre A y B es de 10 horas,

luego en B son las 20 horas.

5. Mapas

Proyecciones de la esfera sobre un plano

Un mapa es una representación de la esfera terrestre sobre un plano.

Como sabemos que la esfera no es una superficie desarrollable llegamos a la conclusión de que los mapas no pueden ser más que representaciones aproximadas de la realidad y nunca exactas.

En este apartado vamos a analizar algunas de las técnicas empleadas para construir mapas. Todas ellas consisten en proyectar los puntos de la esfera sobre un plano y todas ellas tienen ventajas e inconvenientes.

Veremos en cada caso cuáles son estas ventajas e inconvenientes y describiremos su construcción.

En la actualidad se suelen emplear técnicas más complejas para reducir en lo posible los inconvenientes. Estas técnicas suelen mezclar varias de las descritas aquí pero, a pesar de todo, no consiguen suprimir completamente los errores.

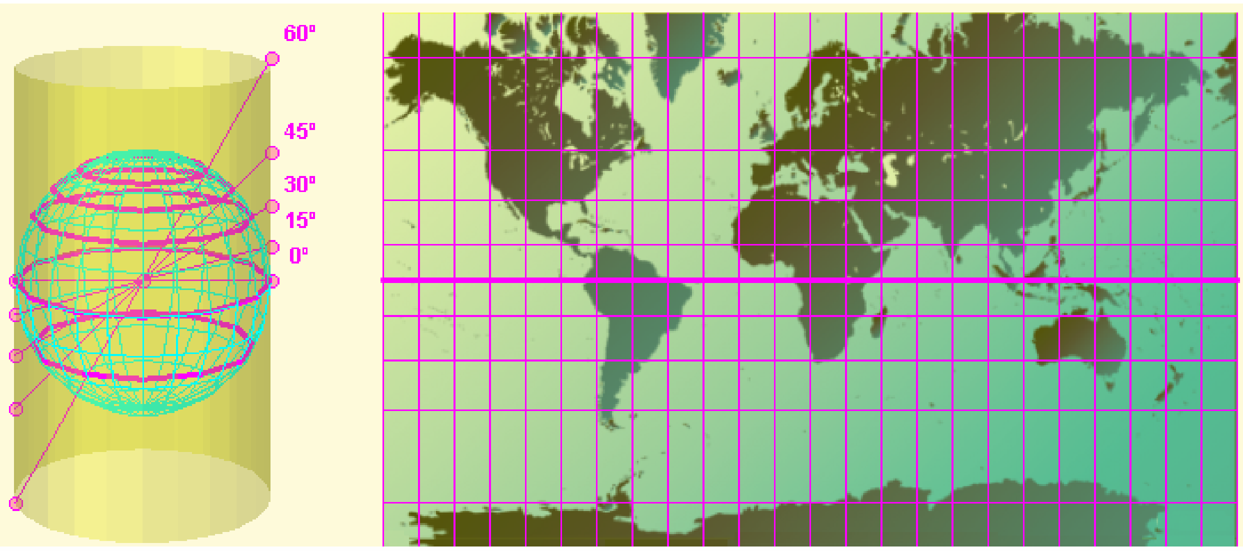
Proyección de Mercator

Proyección cilíndrica desde el centro de la Tierra, inventada por Gerardus Mercator en 1569.

Características: Los meridianos se representan mediante rectas verticales separados por distancias iguales. Los paralelos se representan mediante rectas horizontales más separadas a medida que nos alejamos del Ecuador.

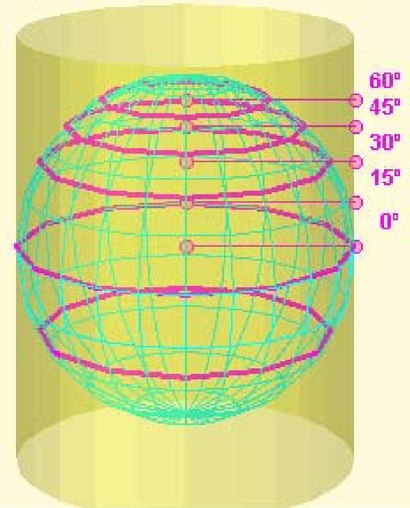
Ventajas: Mantiene la forma real de los continentes y facilita el establecimiento de rumbos constantes de navegación.

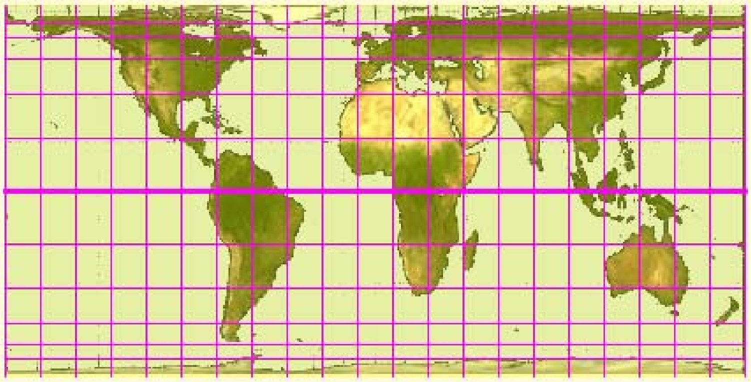
Inconvenientes: Disminuye su precisión a medida que nos alejamos del Ecuador, lo que hace que la superficie de los países de Europa y América del Norte parezca mucho mayor de lo que es en realidad.



Proyección de Gall-Peters

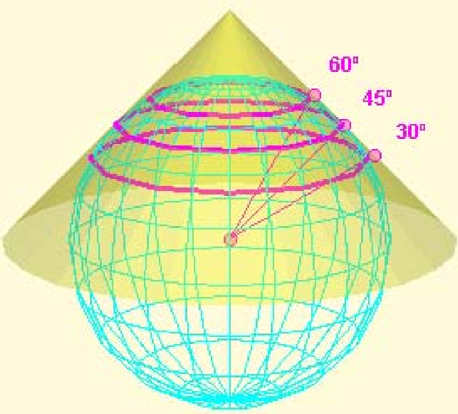
Proyección cilíndrica desde el infinito.
Características: Los meridianos se representan mediante rectas verticales separados por distancias iguales. Los paralelos se representan mediante rectas horizontales más juntas a medida que nos alejamos del Ecuador.
Ventajas: Este tipo de proyección conserva las áreas, es decir, la superficie de los continentes tal como se ve en el mapa es la correcta de acuerdo a la escala del mapa.
Inconvenientes: A diferencia de la proyección de Mercator, en este caso no se mantiene la forma correcta de los continentes. Para mantener las áreas, las zonas cercanas al Ecuador se ven más estrechas y largas de lo habitual y las zonas cercanas a los polos se ven más anchas y achatadas.

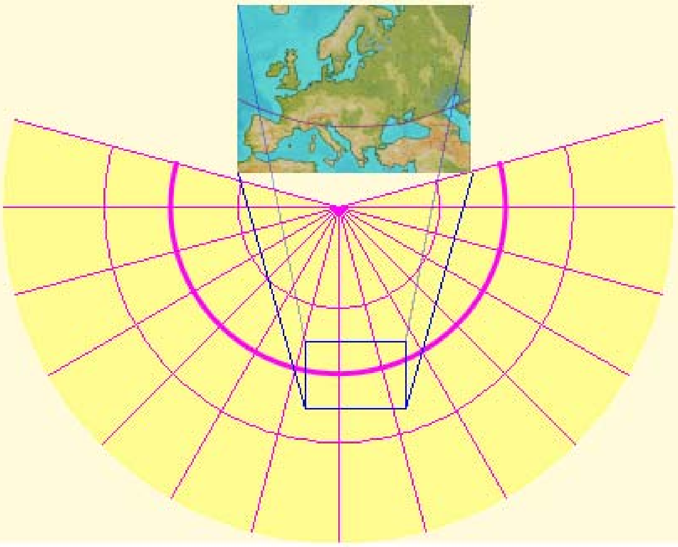




Proyección Cónica

Proyección sobre un cono tangente a la esfera a lo largo de un paralelo.
Características: El mapa aparece en el desarrollo del cono. Los meridianos se representan mediante generatrices del cono separados por distancias angulares iguales. Los paralelos se representan mediante arcos de circunferencia perpendiculares a los meridianos.
Ventajas: Es muy adecuado para representar mapas zonales. Es muy preciso cerca del paralelo de tangencia.
Inconvenientes: Al igual que en los casos anteriores las distorsiones aumentan al alejarnos del paralelo de tangencia.





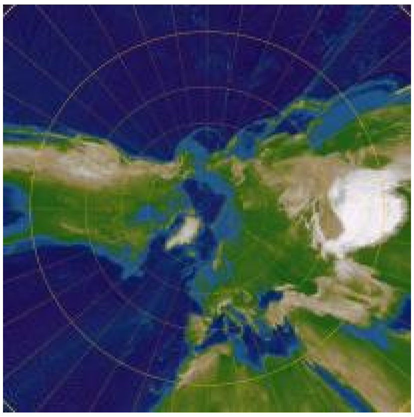
Proyección Azimutal

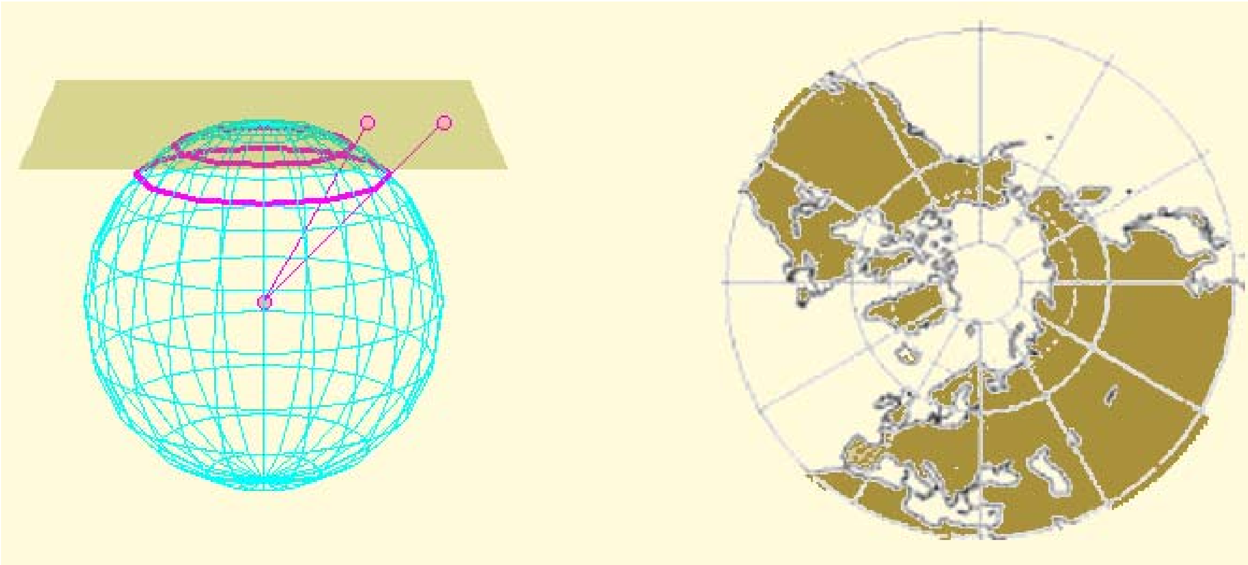
Proyección sobre un plano tangente a la esfera en uno de los polos.

Características: El mapa es circualr. Los meridianos se representan como radios del círculo separados por distancias angulares iguales. Los paralelos son circunferencias concéntricas más separados a medida que nos alejamos del polo.

Ventajas: Es muy adecuado para representar mapas polares. Es muy preciso cerca del polo.

Inconvenientes: Las distorsiones aumentan al alejarnos del polo.





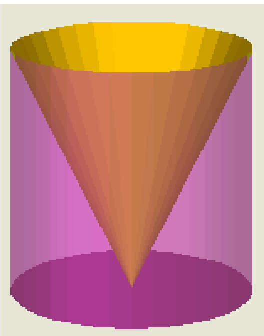
Para practicar

1. Calcula el área total del tetraedro truncado sabiendo que su arista mide 12 cm.

2. Calcula el área total de un prisma recto sabiendo que sus bases son rombos de diagonales D=26cm y d=14cm y su altura de h=26cm.

3. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide cuadrangular regular sabiendo que el lado de la base mayor es B=26cm. El lado de la base menor es b=14cm y la arista lateral es a=13cm.

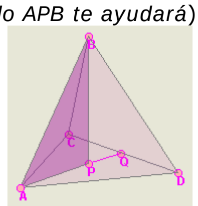
4. Calcula el área total del recipiente de la figura izquierda sabiendo que el radio de la base es r=7cm y la altura es h=13cm.



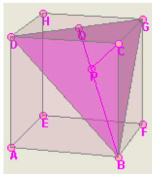
5. ¿Cuántos litros de pintura se necesitan para pintar la pared exterior de un observatorio astronómico (figura arriba derecha) sabiendo que tiene un radio de 5m, que la altura del cilindro es de 9m y que con cada litro se pueden pintar 10 metros cuadrados?

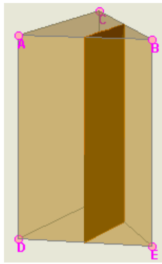
6. Una bola de navidad de 3cm de radio se quiere cubrir parcialmente con pan de oro de forma que la franja cubierta tenga una amplitud de 60º desde el centro de la bola. Calcula la superficie de la bola que se pintará.

7. Calcula el volumen del tetraedro regular de la figura sabiendo que su arista AB=10cm. (*El triángulo APB te ayudará*)



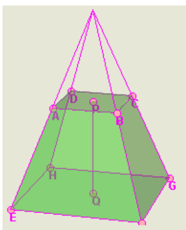
8. El cubo de la figura tiene 10 cm de arista. Calcula el volumen del tetraedro de vértices BCDG y comprueba que es la sexta parte del volumen del cubo.

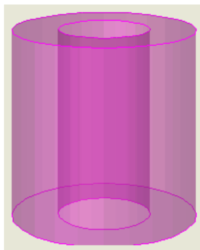




9. Calcula el volumen de los dos prismas en que queda dividido el prisma regular triangular de la figura al ser cortado por un plano perpendicular a las bases que pasa por los puntos medios de las aristas. AD=20m y AC=15m.

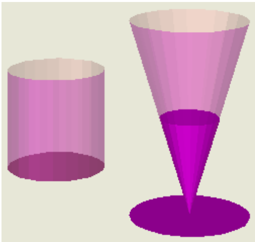
10. Calcula el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular sabiendo que la arista de la base mayor es EF=20cm, la arista de la base menor es AB=8cm y la altura del tronco es PQ=15cm.



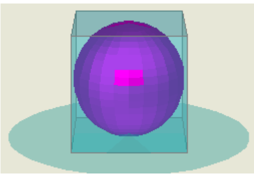


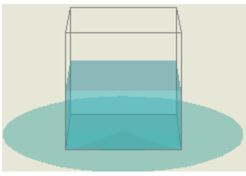
11. Calcula el volumen de la pieza de arriba sabiendo que el diámetro de la circunferencia exterior es de 10cm, el diámetro de la circunferencia interior es de 5 cm y la altura es de 10 cm.

12. Las figuras representan un vaso cilíndrico de 6cm de diámetro y 8 cm de altura y una copa con forma de tronco de cono con 7cm de diámetro mayor, 5 cm de diámetro menor y 8 cm de generatriz. ¿Cuál tiene más capacidad?

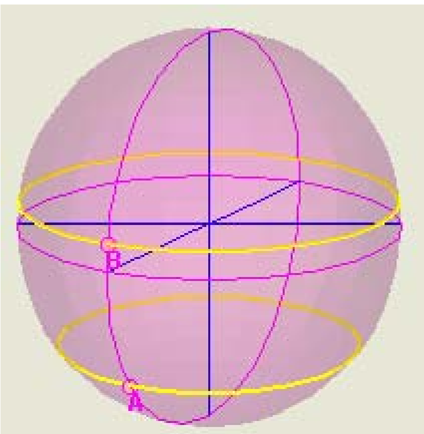


13. Un recipiente cúbico de 10 cm de arista está lleno de agua. Se introduce en él con cuidado una bola de cristal de 5 cm de radio y luego se saca con cuidado. Calcula el volumen del agua que se ha derramado y la altura a la que queda el agua cuando se saca la bola.

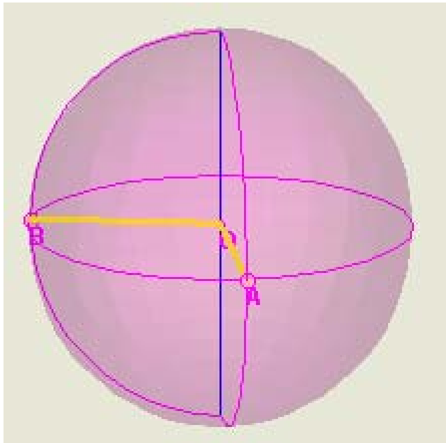




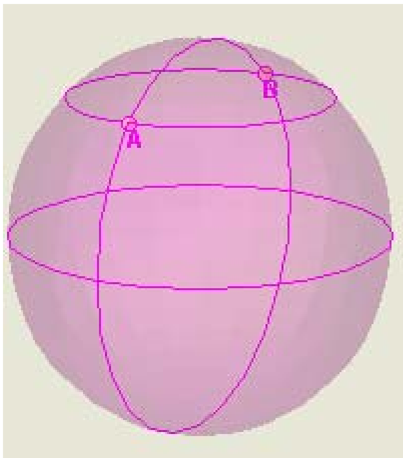
14. Calcula la distancia entre dos puntos de la Tierra, A y B, situados en el mismo meridiano, si la latitud de A es de 38º 5′ S y la de B es de 7º 28′ N.



15. El punto A se encuentra en el meridiano 7ºE y el punto B en el meridiano 94ºO. Si en A son las 23 horas, ¿qué hora es en B?



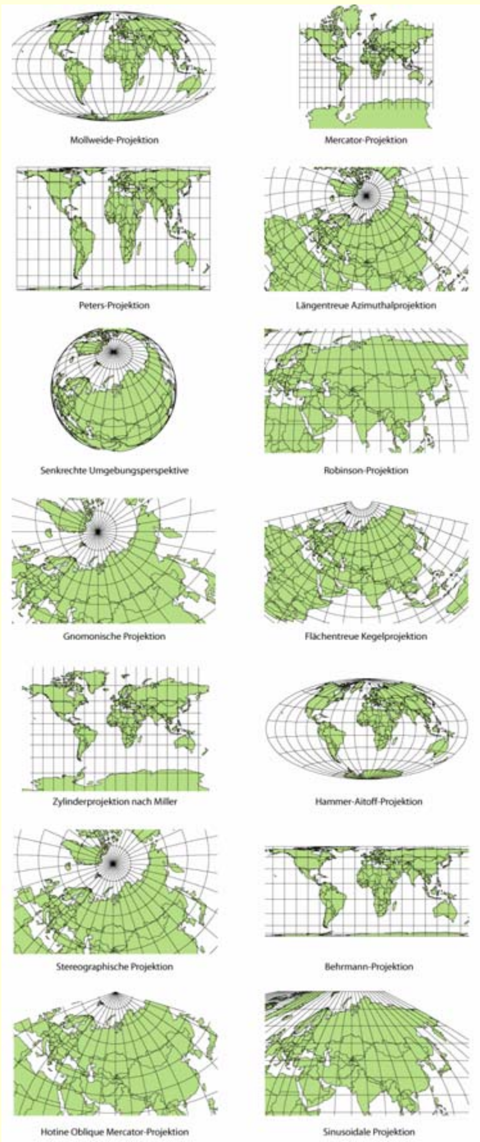
16. Los puntos A y B se encuentran sobre el paralelo 45ºN y sus longitudes se diferencian en 180º. Un avión tiene que ir desde A hasta B ¿qué ruta es más corta: siguiendo el paralelo o siguiendo el meridiano por el Polo Norte?



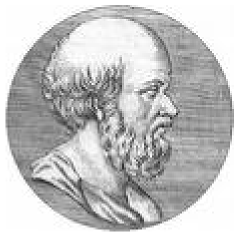
Para saber más

Otros tipos de mapa

Como hemos visto hay diferentes tipos de mapas basados en proyecciones distintas de la esfera sobre diferentes tipos de superficie. Aquí te mostramos algunos otros tipos:



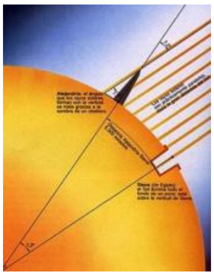
La medida de la Tierra



El tamaño aproximado de nuestro planeta se conoce desde antiguo.

En el siglo III a C. Eratóstenes calculó el radio de la Tierra con una precisión muy buena.

Sabía que las ciudades egipcias de Siena y Alejandría estaban en el mismo meridiano y que el día del solsticio de verano la luz del Sol llegaba al fondo de un pozo en Siena y, el mismo día, en Alejandría los obeliscos proyectaban sombra con un ángulo de 7º.



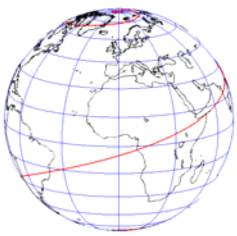
En el dibujo puedes ver que el ángulo de la sombra coincide con la diferencia de latitud entre las dos ciudades.

Eratóstenes contrató a un hombre para que midiera la distancia entre ambas ciudades que resultó ser de unos 800 km.

Si 7º de meridiano tienen una longitud de 800 km, el meridiano entero de 360º medirá 800/7·360 = 41143 km, de donde el radio de la Tierra sería:

$$R = 41143/(2\pi) = 6548 \text{ km.}$$

¡Una excelente aproximación para la época! El radio medio real es de unos 6400 km.



Geodésicas y loxodromas.

Una **geodésica** es una línea que une dos puntos de una superficie por el camino más corto. Sobre la Tierra las geodésicas son los círculos máximos. Una **loxodroma** es una trayectoria sobre la Tierra que corta a todos los meridianos con un ángulo constante. Son muy usadas en la navegación aérea y marítima. En la imagen puedes ver una loxodroma de 72º.

Recuerda lo más importante

Poliedros

Regulares: sus caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice concurre el mismo nº de caras.
Semirregulares: las caras son polígonos regulares de tipos diferentes y con el mismo nº y tipo de caras en cada vértice.
Prismas: las bases son polígonos regulares iguales y los lados son paralelogramos.
Pirámides: la base es un polígono regular y los lados son triángulos concurrentes en un vértice común.
Todos son desarrollables.

Cuerpos de revolución

Cilindro: generado por un rectángulo al girar sobre uno de sus lados.
Cono: generado por un triángulo rectángulo al girar sobre uno de sus catetos.
El cilindro y el cono son desarrollables.
Esfera: generada por una circunferencia al girar sobre uno de sus diámetros.
La esfera no es desarrollable.

Áreas y volúmenes

	A. lat.	A. total	Volumen
Prismas	$p \cdot h$	$B+p \cdot h$	$B \cdot h$
Pirámides	$(p \cdot a)/2$	$B+(pa)/2$	$(B \cdot h)/3$
Cilindros	$2\pi rh$	$2\pi r^2+2\pi rh$	πr^2h
Conos	πgr	$\pi r^2+\pi gr$	$(\pi r^2h)/3$
Esferas		$4\pi R^2$	$(4\pi R^3)/3$

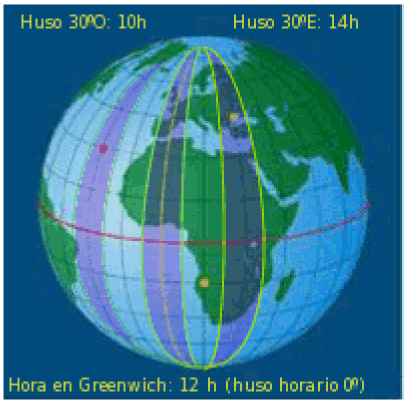
p = perímetro de la base,
B = área de la base,
h = altura, a = apotema (pirámide),
r = radio de la base (conos y cilindros),
R = radio (esfera), g = generatriz (cono)

Poliedros:

El área de un poliedro es siempre igual a la suma de las áreas de los polígonos que forman sus caras. El volumen se calcula descomponiendo el poliedro en prismas y/o pirámides y sumando sus volúmenes.

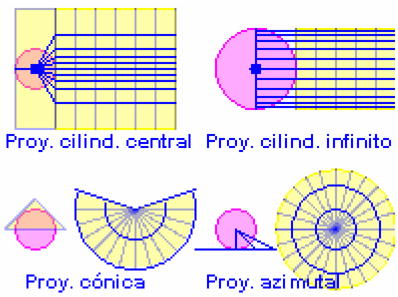
La esfera terrestre

Meridianos: círculos máximos que pasan por los polos. Se numeran de 0º a 180º Este y Oeste a partir del ***Meridiano de Greenwich***. El meridiano de un lugar es su **longitud**.
Paralelos: círculos perpendiculares al eje de la Tierra. Se numeran de 0º a 90º Norte y Sur a partir del ***Ecuador***. El paralelo de un lugar es su **latitud**.
Husos horarios: la Tiera se divide en 24 husos geográficos de 15º de amplitud con una hora de diferencia entre ellos.

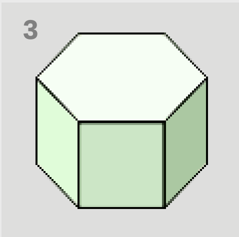


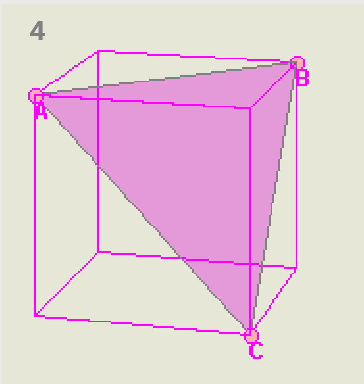
Mapas

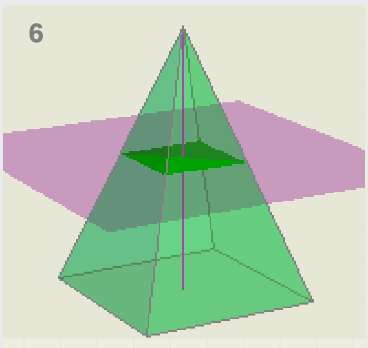
Un mapa es una representación de la esfera terrestre sobre un plano, obtenida mediante alguna forma de proyección. Las más habituales son las siguientes:



Autoevaluación







10

a) Mapa de Mercator
1) Los paralelos son círculos y los meridianos radios.

b) Mapa de Gall-Peters
2) Los meridianos y paralelos son rectas perpendiculares y los paralelos están más separados cuanto más lejos del Ecuador.

c) Mapa azimutal
3) Los paralelos son arcos de circunferencia y los meridianos son rectas convergentes.

d) Mapa cónico
4) Los meridianos y paralelos son rectas perpendiculares y los paralelos están más juntos cuanto más lejos del Ecuador.

1. Indica qué poliedro se obtiene al truncar las aristas de un dodecaedro por la mitad e indica el número de caras aristas y vértices que tiene.

2. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 12 cm y 16 cm. Averigua qué cono tiene mayor área total: el que se obtiene haciendo girar el triángulo alrededor del primer cateto o el que se obtiene al girar sobre el segundo.

3. Calcula el área total del poliedro semirregular de la imagen sabiendo que su arista es a. (Expresa el resultado en función de a)

4. Calcula el área del triángulo de la figura sabiendo que la arista del cubo es a. (Expresa el resultado en función de a)

5. La "zona tropical" de la Tierra está situada, aproximadamente, entre los paralelos 30º N y 30º S. ¿Qué porcentaje de la superficie de la Tierra está situada en la zona tropical?

6. Una pirámide de base cuadrada se corta con un plano paralelo a la base por la mitad de la altura de la pirámide, obteniendo una pirámide más pequeña y un tronco de pirámide ¿Cuántas veces es más grande el volumen del tronco con respecto al volumen de la pirámide pequeña?

7. Se corta una semiesfera de radio R con un plano paralelo a la base de la semiesfera, a una altura de 2/3 del radio. Halla el volumen de la mayor de las dos zonas en que queda dividida. (Expresa el resultado en función de R)

8. Una milla náutica es la distancia entre dos puntos situados sobre el Ecuador con una diferencia de longitudes de 1' ¿A cuántos km equivale una milla náutica si el radio de la Tierra es de 6366 km?

9. Boston está en el meridiano 71º O y Frankfurt en el meridiano 9º E. Un avión sale de Frankfurt a las 23 horas y tarda 8 horas en llegar a Boston. ¿Qué hora es en Boston cuando llega?

10. Asocia los distintos tipos de mapa con sus características.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. 1745,9 cm^2
2. 1899,54 cm^2
3. 922,6 cm^2
4. 1050,4 cm^2
5. 43,98 litros
6. 56,54 cm^2
7. 117,85 cm^3
8. 500/3 cm^3
9. El pequeño 162,37 m^3 y el grande 487,13 cm^3.
10. 3120 cm^3.
11. 589,04 cm^3
12. La copa tiene un volumen de 226,49 cm^3 y el vaso de 226,19 cm^3. Tienen prácticamente la misma capacidad.
13. Se han derramado 523, 59 cm^3 de agua. La altura final del agua es de 4,76 cm
14. 5061 km.
15. En B son las 17 horas.
16. Por el meridiano son 10.000 km y por el paralelo son 14.172 km.

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. Es un icosidodecaedro con 32 caras, 60 aristas y 30 vértices.
2. El que gira sobre el primero: 576π cm^2 frente a 384π cm^2.
3. $6a^2 + 3a^2\sqrt{3}$
4. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$
5. 50%
6. El tronco es 7 veces mayor que la pirámide pequeña.
7. $\dfrac{46\pi R^3}{81}$
8. 1,85 km
9. Es la 1 de la madrugada del día siguiente.
10. a2, b4, c1, d3

No olvides enviar las actividades al tutor